Greensche Funktionen von Fermionen im Falle starker Kopplung unter Verwendung der Funktionalintegration

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
des Wissenschaftlichen Rates der Humboldt-Universität
zu Berlin

von
Dipl.-Phys. Tord Riemann
geb. am 17. 6. 1951 in Berlin

Dekan: Prof. Dr. sc. nat. D. Hass

Gutachter: 1. Prof. Dr. habil. F. Kaschluhn
2. Dr. rer. nat. habil. H. J. Kaiser
3. Dr. sc. nat. E. Wieczorek

Berlin, den

Inhaltsverzeichnis

Seite

Thesen

1. Einleitung 1

2. Ableitung des Graphenschemas 7

3. Definition der Graphen 16

4. Der Propagator des freien Fermions 22

4.1. Konvergenz bei Verwendung einer Mittelungsmethode 25

4.2. Konvergenz bei Verwendung von Wilsons Differenzenoperator 31

5. Zur Berechnung des Propagators im Wechselwirkungsfalle 35

5.1. Mittelungsmethode 35

5.2. Wilsons Methode 40

6. Wechselwirkung mehrerer Felder 43

6.1. Ein Beispiel 47

7. Schlußbemerkungen 54

Literaturverzeichnis

Anhang 1: Bezeichnungen

Anhang 2: Der Gitterraum

Anhang 3: Grassmann-Variable

Anhang 4: M- und f-Koeffizienten

Thesen

1.

Im Rahmen quantenfeldtheoretischer Untersuchungen besteht großes Interesse an der Bereitstellung geeigneter Näherungsmethoden, da exakte Lösungen im allgemeinen nicht gewonnen werden können. Prototyp ist die Feynmansche Störungstheorie, eine Entwicklung des jeweils untersuchten Objekts nach positiven Potenzen der Kopplungskonstanten. Man kann nicht erwarten, daß dieses Verfahren bei der Behandlung der starken Wechselwirkung erfolgreich ist, da hier die Kopplungskonstante $g \gg 1$ ist. Es gilt also, Approximationsmethoden zu finden, die an den Fall starker Kopplung besser angepaßt sind. Neben den semiklassischen Verfahren, die die näherungsweise Lösung der quantisierten Theorie gestatten, wenn die entsprechende klassische Theorie bekannt ist, bietet sich die sogenannte Wegintegralentwicklung an.

2.

Die Wegintegralentwicklung basiert auf der Darstellung der Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten von Feldoperatoren - Greensche Funktionen - durch Funktionalintegrale; dabei wird im Bosefall mit klassischen, unquantisierten Feldern gearbeitet. Im Fermifall hat sich in den quantenmechanischen und feldtheoretischen Anwendungen der Funktionalintegration die Benutzung unquantisierter antikommutierender (pseudoklassischer) Felder durchgesetzt.

Wir betrachten die Zweipunktfunktion eines (zunächst) selbstwechselwirkenden Fermions:

$$(1) \qquad \tilde{S}_F(x-y) = \langle \tilde{0} | T\, \psi_\alpha(x)\, \bar{\psi}_\beta(y) | \tilde{0} \rangle$$

$$= \frac{\int D\bar{\psi} D\psi \; e^{i\int dx [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1]} \; \psi_\alpha(x)\, \bar{\psi}_\beta(y)}{\int D\bar{\psi} D\psi \; e^{i\int dx [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1]}}$$

3.
Die Approximation besteht in der Berücksichtigung einer wachsenden Zahl von Ordnungen einer unendlichen Reihe, die durch Entwicklung des Exponentials des wechselwirkungsfreien Teils der Wirkung unterm funktionalen Maß entsteht. Die dabei entstehenden Funktionalintegrale werden mit Hilfe eines Gitterraumformalismus ausgewertet. Mit wachsender Ordnung der Entwicklung entsteht eine Verkopplung von immer mehr Gitterpunkten miteinander, wodurch eine Interpolation zwischen sogenannten ultralokalen statischen Feldtheorien (keinerlei Verkopplung der Raum-Zeit-Punkte) und "konventionellen" Feldtheorien hergestellt wird.
Die gesamte Wechselwirkung ist in endlichdimensionalen Integralen über Grassmannvariable enthalten, die wir M-Koeffizienten nennen. Ihre Auswertung ist trivial. Sie enthalten die Kopplungskonstante mit negativen Potenzen, sodaß wirklich eine Entwicklung für den Fall starker Kopplung vorliegt.

4.
In jeder Ordnung der Entwicklung entsteht eine endliche, doch schnell wachsende Zahl von Beiträgen. Ihre Erfassung und Berechnung wird durch ein Graphenschema (das Analogon zu den Feynmangraphen) erleichtert. Die Graphen bestehen aus Propagatoren und Vertices. Die Fermionpropagatoren haben einen Richtungssinn. Graphen der k-ten Ordnung enthalten k Propagatoren. In jeden Vertex laufen ebensoviele Propagatoren ein wie aus. Ihre Zahl ist aufgrund der Zahl der verfügbaren Propagatoren im Graph sowie wegen der Antivertauschungseigenschaften der Felder (d.h. letztlich wegen des Paulischen Ausschließungsprinzips für Fermionen) begrenzt.

5.
Solche Graphen lassen sich jeweils für den Zähler und den Nenner in (1) formulieren. Die Division führt dazu, daß die Greensche Funktion durch eine Teilklasse der

Zählergraphen repräsentiert wird. Die entstehende Reihe hängt nur noch von der Gitterkonstanten ε ab, nicht mehr vom Volumen der im Grenzfall unendlich ausgedehnten Raum-Zeit.

6.

Wir zeigen für den Fall des freien Fermions, daß die hier exakt aufsummierbare Reihe einer Differenzengleichung genügt. Das ist gerade die Gleichung, die man aus der Gleichung der Greenschen Funktionen im Kontinuum erhält, wenn der Differentialoperator durch den Differenzenoperator ersetzt wird, den wir im Lagrangean verwenden. Wir zeigen weiter, daß die Gitterraumlösung $S_\varepsilon(x)$ nicht für jeden Differenzenoperator gegen die kausale Greensche Funktion $S_F(x)$ konvergiert. Wir geben eine Vorschrift an, die das gesuchte Konvergenzverhalten erzeugt und gute Aussichten hat, auch im Falle eingeschalteter Wechselwirkung sinnvoll zu bleiben. Die verwendete Untersuchungsmethode beruht auf einer Fouriertransformation der Gitterraumtheorie und Untersuchung der Pole im Impulsraum. Die Pole und ihre Behandlung legen die Randbedingungen fest, durch deren Vorgabe die kausale Greensche Funktion ausgezeichnet wird. Man muß sichern, daß die Polstruktur der Gittertheorie gegen die der Kontinuumstheorie strebt und ihre Behandlung geeignet definieren. Neben der von uns vorgeschlagenen Variante (Verwendung eines bestimmten Differenzenoperators in Verbindung mit einer Mittelung der Funktion $S_\varepsilon(x_n)$ über einen Würfel der Kantenlänge ε) diskutieren wir eine von einem anderen Autor vorgeschlagene Variante, die für unseren Formalismus ebenfalls verwendet werden kann. Weitere Vorschläge für Differenzenoperatoren werden erwähnt, jedoch nicht ausführlich diskutiert.

Durch die Festlegung des Differenzenoperators ist die Entwicklung des Funktionalintegrals im Gitterformalismus (genauer: das Funktionalintegral im Gitter überhaupt)

endgültig festgelegt.
Die Probleme bei der Auswahl des geeigneten Differenzenoperators hängen in keiner Weise am Begriff des Funktionalintegrals. Sie entstehen allein durch die Verwendung des Gitterraumes. Sie können auch im Basisfall nachgewiesen werden.

7.
Die Graphen der ersten Ordnungen der Entwicklung werden explizit angegeben für zwei verschiedene Differenzenoperatoren.
Bei der Mittelungsmethode tragen bei beliebiger Wechselwirkung keine Graphen bei, die loops mit ungerader Zahl von Fermionlinien enthalten.

8.
Es wird angedeutet, wie der Formalismus verallgemeinert wird, wenn verschiedene Felder wechselwirken. Als Beispiel dient die Wechselwirkung zweier Fermifelder. Im Falle einer trivialen Kopplung sind die Graphen aufsummierbar und die Reihe konvergiert bei Verwendung geeigneter Differenzenoperatoren. Es scheint ratsam, für alle Fermifelder dieselbe Definition der Gitterraumableitung zu verwenden.

9.
Wir formulieren die Beiträge so, daß die Greensche Funktion als Entwicklung nach Ableitungen der Gitterraumdeltafunktion erscheint. Die Entwicklungskoeffizienten $C_K(\ell)$ sind unendliche, im allgemeinen divergente Reihen in der Gitterkonstanten. Wenn es gelingt, sie durch Padé-Approximation oder ähnliche Verfahren konvergent zu machen, sind ihre Grenzwerte den Momenten der Spektralfunktionen des Propagators proportional.

10.
Abschließend werden neben der Zusammenfassung der Resultate noch offene Probleme aufgezeigt und die Richtung weiterer Untersuchungen abgesteckt.

1. Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist eine Methode zur Untersuchung quantenfeldtheoretischer Greenscher Funktionen. Wir benutzen dabei die Darstellung durch Funktionalintegrale.

Funktionalintegrale wurden in die Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie erstmalig von Feynman /1, 2/ eingeführt. Er faßte sie als Grenzwerte von Ausdrücken auf, die für einen diskretisierten Konfigurationsraum (Gitterraum) definiert sind.

Feldtheoretische Greensche Funktionen - auch von Fermifeldern - wurden in den Arbeiten von Matthews, Salam /3, 4/ und Chalatnikov / 5/ durch Funktionalintegrale dargestellt und untersucht. Sie waren im wesentlichen Formulierungsfragen gewidmet. Insbesondere war noch eine gewisse formale Unsicherheit bei der Behandlung von Spinorfeldern zu verzeichnen.

Fragen der Berücksichtigung von Fermionen bei der Funktionalintegration sind in der Folgezeit in einer Vielzahl von Arbeiten unter verschiedensten Aspekten untersucht worden /6 - 15/. Weitere Verweise finden sich in /16/, wo auch umfangreiche Quellenhinweise zur mathematischen Theorie der Funktionalintegration gegeben werden.

Obwohl bereits in den frühen Arbeiten sowie in /12/ die Verwendung der Funktionalintegration zur Lösung konkreter Probleme demonstriert wurde, stand sie doch längere Zeit im Schatten anderer Methoden.

Das wurde in den letzten zehn Jahren anders. Neben der größeren Sicherheit im Umgang mit Funktionalintegralen entwickelte sich auch das Gespür für die spezifischen Möglichkeiten in diesem Zugang. So war die Formulierung der dualen Resonanzmodelle auf der Basis der Funktionalintegration fruchtbar; auf ihrer Grundlage entwickelten sich die Modelle wechselwirkender Strings /17 - 19/. Als außerordentlich tragfähig erwies sich die Verwendung der Funktionalintegration bei der Formulierung von Eichfeldtheorien (vgl. /20/). Ein

weiteres Anwendungsgebiet ist unter dem Begriff semiklassische Näherungsmethoden zusammenzufassen. Die Methoden der Funktionalintegration gestatten es, unter Verwendung klassischer Lösungen einer Feldtheorie näherungsweise Lösungen der quantisierten zu gewinnen /21/. Semiklassische Näherungsverfahren können u.a. auch im Falle starker Kopplung verwendet werden, was sie besonders attraktiv macht.

In unserer Arbeit geht es um eine andere Näherungsmethode für den Fall starker Kopplung, die sogenannte Wegintegralentwicklung. Auch hier zeigt sich die Funktionalintegration als praktikable Technik zur Behandlung einer Quantenfeldtheorie. Der Zugang geht auf eine Idee von Hori /22/ zurück. Er wurde in /23 - 26/ für ein selbstwechselwirkendes Bosefeld ausgearbeitet. Die Funktionalintegrale werden so behandelt, daß eine Reihenentwicklung nach Potenzen der inversen Kopplungskonstanten entsteht.

Das gelingt durch Entwicklung des Exponentials der freien Wirkung in eine formale Taylorreihe. (In der üblichen Störungstheorie geht man umgekehrt vor; das Exponential des Wechselwirkungsanteils wird entwickelt.)

Die verbleibenden Funktionalintegrale werden in einem Gitterraum ausgewertet. Dabei leistet ein Graphenschema, ähnlich den Feynmangraphen, wertvolle Hilfe. Die Näherung bei diesem Vorgehen besteht in der schrittweisen Verkopplung von immer mehr Punkten des Gitterraumes durch die Behandlung des kinetischen Terms. Damit stellt die Wegintegralentwicklung eine Interpolation zwischen ultralokalen statischen Feldtheorien /27/ und "konventionellen" Feldtheorien dar. Parallel zu den Arbeiten /23 - 26/ wird dieselbe Problemstellung unter Anwendung anderer mathematischer Mittel in /28/ untersucht. Das Vorgehen von Wilson /29, 30/ ist unserem sehr ähnlich. Er untersucht Eichfeldtheorien mittels Wegintegralentwicklung im Gitterraum. Im Unterschied zu /24 - 26/ entwickelt er nicht nach dem vollen kinetischen Term, sondern wählt den reinen Gitterpunktverkopplungsanteil. Formal entspricht sein Vorgehen dem sogenannten M-Graphen-Schema (vgl. /24/).

In den Arbeiten /23 - 26/ wurde der Bosefall ausführlich studiert. Die Untersuchung einigermaßen realistischer Feldtheorien macht die Behandlung von Fermifeldern notwendig. Dazu war es notwendig, aus den verschiedenen Vorschlägen zur Definition von Funktionalintegralen zur Quantisierung von Fermifeldern das geeignete Verfahren herauszufinden. Es zeigte sich weiter, daß die Behandlung von Fermifeldern im Gitter - unabhängig von Problemen im Zusammenhang mit der funktionalen Integration - Probleme bereitet, die an die Wegintegralmethode angepaßt überwunden werden mußten.

Schließlich galt es, die Wegintegralentwicklung für Fermifelder zu definieren und wesentliche Charakteristika auszuarbeiten.

Diesen Problemen ist die vorliegende Arbeit gewidmet; wesentliche Teile wurden bereits publiziert /31/.

Ausgangspunkt der Arbeit ist die Darstellung des vollen Propagators durch ein Funktionalintegral, wie sie erstmals in /3, 5/ verwendet wird. Sie ist unter Zugrundelegung von antikommutierenden (pseudoklassischen) Variablen, sogenannten Grassmannvariablen (vgl. z.B. /32/) definiert. Die Verwendung solcher Objekte hat seit den Arbeiten von Berezin (u.a. /11/) allgemeine Verbreitung gefunden. Heute wird in praktisch allen Anwendungen der Funktionalintegration bei Fermiquantelung mit Grassmannvariablen gearbeitet.

In Abschnitt 2 wird die Diagrammtechnik zur näherungsweisen Berechnung der Zweipunktfunktion eines selbstwechselwirkenden Fermifeldes abgeleitet. Das Verfahren ist analog dem im Bosefall. Das Exponential des wechselwirkungsfreien Teils der Wirkung wird in eine formale Taylorreihe entwickelt. Die Auswertung der in den verschiedenen Ordnungen auftretenden Funktionalintegrale erfolgt in einem d-dimensionalen Gitterraum. Die Einführung der sogenannten f-Graphen geschieht zur Veranschaulichung und Erleichterung der Rechnung. In jeder Ordnung gibt es endlich viele Graphen. Je höher die Ordnung ist, umso mehr Gitterpunkte werden miteinander verkoppelt. Die gesamte Wechselwirkung steckt in sogenannten M-Koeffi-

zienten; das sind hier endlichdimensionale Integrale über die Grassmannvariablen, die sind gewöhnliche komplexe Zahlen.

Die Fermionen-Graphen unterscheiden sich nur unwesentlich von denen des Bosefalls; die Propagatoren tragen hier Pfeile, was in einer Spinortheorie nicht unerwartet ist. Zusätzlich ist wegen der Antikommutationseigenschaften der Grassmann-Variablen (d.h. letztlich, weil Fermiteilchen der Fermi-Dirac-Statistik gehorchen) die Komplexität der Graphen gewissen Einschränkungen unterworfen.

In Abschnitt 3 geben wir an, wie alle Graphen einer Ordnung gefunden werden können, und welche Beiträge von den einzelnen Graphen kommen. Es wird demonstriert, daß durch die Normierung des Propagators eine Vielzahl von Graphen (die sogenannten unverbundenen (disconnected) Graphen) kompensiert werden. Das bewirkt gerade, daß die ursprünglich vorhandene Abhängigkeit der Beiträge vom Volumen des Gitterraumes beseitigt wird; die Existenz des Gitters zeigt sich nur noch in der allerdings sehr komplizierten Abhängigkeit der Beiträge von der Gitterkonstanten.

Die Resultate von Abschnitt 2 und 3 sind relativ unabhängig von der zugrundegelegten Metrik und der Wahl des dem Differentialoperator entsprechenden Differenzenoperators.

Abschnitt 4 ist der expliziten Berechnung des Propagators des freien Fermions gewidmet. Die durch unser Verfahren definierte Reihe ist exakt aufsummierbar. Es zeigt sich, daß die Summe bei beliebiger Wahl des Differenzenoperators wenn überhaupt, dann gegen eine Greensche Funktion konvergiert. Hierbei sei unter Greenscher Funktion $S(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung für die Greenschen Funktionen des freien Fermions verstanden. Soll jedoch die Reihe gegen den Propagator $S_F(x)$, d.h. gegen die kausale Greensche Funktion konvergieren, ist die Zahl der geeigneten Differenzenoperatoren stark eingeschränkt. Diese Einschränkung wurde unabhängig von uns auch von anderen Autoren festgestellt /30, 33, 34/. Dieses Phänomen hat nichts mit der

Funktionalintegration zu tun, sondern entsteht allein durch die Verwendung eines Gitterraumes. Es ist eigentlich im Bosefall ebenso wie im Falle von Fermifeldern präsent, nur gelingt es da ohne besondere Maßnahmen, seiner Herr zu werden. Es werden in Abschnitt 4 drei Möglichkeiten diskutiert, den richtigen Kontinuumslimes zu erzeugen:
relativ ausführlich gehen wir auf die Möglichkeit einer geeigneten Mittelungsprozedur ein, die im Hinblick auf die spätere Kopplung mehrerer Felder (u.a. Bosefelder) am natürlichsten scheint (vgl. dazu Abschnitt 6) und technisch am einfachsten zu bewältigen ist. Dann schildern wir die von Wilson in /30/ vorgeschlagene Methode (in /29/ verwendet Wilson eine Ableitungsdefinition, die den Konvergenzproblemen keine Rechnung trägt). Sie ist elegant, jedoch in unserem Verfahren technisch aufwendiger. Erwähnt wird schließlich die in /31/ vorgeschlagene Variante, die jedoch gegenüber den beiden vorgenannten Nachteile besitzt. Erwähnt sei, daß in /33, 34/ weitere Möglichkeiten zur Behandlung von Fermionen im Gitter vorgeschlagen werden. Sie scheinen jedoch für die Wegintegralentwicklung weniger geeignet.

In Abschnitt 5 werden, unter Ausnutzung der Erkenntnisse aus Abschnitt 4, die ersten Ordnungen der Entwicklung explizit ausgerechnet. Auf wesentliche technische Probleme wird hingewiesen. Die Resultate sind tabellarisch zusammengefaßt.

In Abschnitt 6 werden am Beispiel der Wechselwirkung zweier Spinorfelder die typischen Merkmale der Entwicklung bei Anwesenheit mehrerer Felder demonstriert. In einem einfachen Fall (Kopplung zweier Oszillatoren) kann wieder aufsummiert werden. Die Auswirkung der Mittelungsprozedur aus Abschnitt 4 auf Theorien mit Wechselwirkungen verschiedener Felder wird kurz betrachtet.

Abschnitt 7 enthält die Zusammenfassung und einige abschließende Bemerkungen, insbesondere auch Hinweise auf noch ungelöste Probleme und mögliche weitere Untersuchungen.

Auf das Literaturverzeichnis folgen einige Anhänge, die tech-

nischen Details gewidmet sind. In Anhang 1 sind Definitionen und Bezeichnungen zusammengefaßt. Anhang 2 enthält eine kurze Einführung in Gitterraumrechnungen, soweit sie zur Auswertung der Graphen notwendig sind, Anhang 3 einiges zur Arbeit mit Grassmannvariablen. Anhang 4 ist dem Zusammenhang der die Wechselwirkung enthaltenden M-Koeffizienten mit den dem Graphenschema angepaßten f-Koeffizienten und einigen Beispielen gewidmet.

2. Ableitung des Graphenschemas

Wir gehen aus von der Darstellung der 2-Punkt-Funktion durch ein Funktionalintegral /3 - 5, 36/

$$iS_F(x-y)_{\alpha\beta} = \langle \tilde{0}| T\, \psi_\beta(y)\, \bar{\psi}_\alpha(x) |\tilde{0}\rangle$$

$$(1) \qquad = \frac{\frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{g}\, \mathcal{D}g\, e^{iS}\, \bar{g}_\beta(y)\, g_\alpha(x)}{\frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{g}\, \mathcal{D}g\, e^{iS}}$$

$$S = \int d^dx \left[i\bar{g}\gamma^\mu \partial_\mu g - \mathcal{H}(\bar{g}, g) \right]$$

$$(2) \qquad = \int d^dx \left[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_i \right]$$

$$= S_0 + S_i$$

Wir haben S_0 nicht in der symmetrisierten, hermiteschen Form geschrieben. Man überzeugt sich jedoch leicht davon, daß alle in dieser Arbeit enthaltenen Resultate davon unabhängig sind.

Es handele sich um ein selbstwechselwirkendes Fermifeld. Im Funktionalintegral stehen nichtquantisierte pseudoklassische Variable, Elemente einer Grassmann-Algebra mit Involation /11, 32/:

$$(3) \qquad \left\{ g_\alpha(x),\, g_\beta(y) \right\} = \left\{ g_\alpha(x),\, g^+_\beta(y) \right\} = 0$$

Als nützliche Normierung wählen wir in (1)

$$(4) \qquad \mathcal{N} = \int \mathcal{D}\bar{g}\, \mathcal{D}g\, e^{iS_i}$$

Wir müssen den Funktionalintegralen in (1) und (4) einen Sinn geben. Dazu fassen wir sie als Grenzwerte von Ausdrükken auf, die in einem Gitterraum mit Gitterkonstante ε und Volumen V^d definiert sind:

3. Definition der Graphen

In diesem Abschnitt geben wir Regeln zur Erzeugung aller Graphen der Ordnung k und ordnen jedem Graphen die entsprechenden Ausdrücke zu.

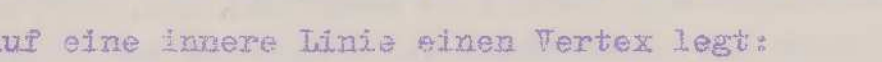
Jeder Graph einer gegebenen Ordnung k enthält k Propagatoren und zwischen 1 und (k+1) Vertices. Die Propagatoren tragen Pfeile; in jeden Vertex müssen ebensoviele Propagatoren einlaufen wie ihn verlassen. Die Graphen der 2-Punkt-Funktion haben zwei freie Enden. Im weiteren wird deutlich werden, daß es in jeder endlichen Ordnung endlich viele Graphen gibt.

Auf folgende Weise kann man alle Graphen einer gegebenen Ordnung k konstruieren:

k = 0:

Es seien alle Graphen der Ordnung (k-1) bekannt. Man erhält aus ihnen die Graphen der Ordnung k, indem man

(I) auf eine innere Linie einen Vertex legt:



(II) In jedem der so gewonnenen Graphen k-ter Ordnung jeden der neu eingeführten Vertices mit bereits vorhandenen zusammenlegt, z.B.

Das ist ein recht übersichtliches Verfahren: hatten wir in der Ordnung (k-1) $g(k-1)$ Graphen, so erhält man daraus durch Setzen von Vertices höchstens $(k-1) \cdot g(k-1)$ verschiedene Graphen der Ordnung k. Aus jedem dieser Graphen kann man nun durch die Operation (2) soviele weitere Graphen erzeugen, wie er in der Ordnung (k-1) Vertices enthielt - maximal (k-1) + 1 = k.

4. Der Propagator des freien Fermions

Wir haben bisher keine expliziten Aussagen über die Definition des Ableitungsoperators machen müssen; die Struktur des Graphenschemas hängt davon nicht ab. Wir zeigen jetzt, daß es keinesfalls egal ist, wie die Ableitung im Gitter definiert wird. Diese Feststellung wurde von einer Reihe von Autoren getroffen; man vergleiche dazu zum Beispiel /30, 33, 34/.

Wir selbst stießen unabhängig von den zitierten Arbeiten auf diese Tatsache erstmalig bei Modellrechnungen mit dem Lagrangean

$$\mathcal{L}_i = - m \psi^+ \psi$$

im Falle d = 1, wo die Funktionalintegration explizit ausführbar ist und für verschiedene Wahl des Operators $\nabla(n)$ wesentlich verschiedene Resultate liefert.

Grundlage unserer Argumentation ist die Berechnung des Propagators des freien Fermions mit $d \geq 1$ und

(1) $$\mathcal{L}_i = - m \bar{\psi} \psi$$

Im Anhang 4 wurde gezeigt, daß in diesem Falle gilt

(A.4 19, 20) $$f_{2x} = \frac{1}{-i \varepsilon^{2d} m} \delta_{x,1}$$

und daher alle jene Graphen identisch Null sind, die Verzweigungen enthalten.

Damit ergibt unser Graphenschema die Vorschrift

(2) $i S^{\varepsilon}(x-y) =$ $+ \cdots$

Der Graph k-ter Ordnung lautet nach den Regeln aus Abschnitt 3:

Lösung überhaupt einen Kontinuumslimes hat)

$$(10) \qquad S(x-y) \equiv \prod_{\mu=0}^{d-1} \theta(x_\mu - y_\mu) \cdot S(x-y)$$

wobei θ die Stufenfunktion ist. Es ist klar, daß (10) nicht der gesuchte Propagator ist ($d > 1$). Damit ist jedoch (8) eine nicht brauchbare Definition.

Um weitergehende Aussagen treffen zu können, ist es sinnvoll, den Ausdruck (6) für $S^E(x-y)$ durch die Fouriertransformierte (A.2.4) darzustellen. Wir erhalten dann

$$(11) \qquad -i\, S_\varepsilon(x_n) = -i \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{+\frac{\pi}{\varepsilon}} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \cdot \frac{i\gamma p + m}{p^2 + m^2} \; e^{-ipx_n}$$

Von einem vernünftigen Gitterraumpropagator verlangen wir, daß die Pole der Fouriertransformierten im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ die Pole des Feynmanschen Propagators ergeben:

$$(12) \qquad -i\, S_F(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \; \frac{i\not{p} + m}{-p^2 + (m^2 - i\eta)} \; e^{-ipx}$$

Man kann jetzt eine ganze Reihe von Gitterraumdefinitionen der Ableitung in (11) einsetzen und ihre Brauchbarkeit testen. Wir tun das hier nur für Fälle, die in der weiteren Diskussion eine Rolle spielen. So haben wir zum Beispiel die unsymmetrisch definierten Ableitungen bereits ausgeschlossen.

4.1. Konvergenz bei Verwendung einer Mittelungsmethode

Zum Auffinden der Pole von (11) genügt es, die Nullstellen des Nenners zu finden, und das heißt letztlich, Lösungen der Gleichung

$$(13) \qquad \left[\nabla^2 + \left(m + i \cdot o(\varepsilon)\right)^2\right] e^{-ipx_n} = 0$$

Der gemittelte Wert enthält also jeweils einen Beitrag von jedem Summanden, aber mit halbem Integrationsgebiet. Insgesamt sind damit die Auswirkungen der überzähligen Freiheitsgrade beseitigt. Insbesondere sind die überflüssigen Pole durch die Verkleinerung des Integrationsgebiets beseitigt.

Somit hätten wir eine Möglichkeit gefunden, den Feynmanschen Propagator auf der Grundlage unseres Graphenschemas zu definieren.

4.2. Konvergenz bei Verwendung von Wilsons Differenzenoperator

Eine andere Möglichkeit, durch Gitterraummanipulationen den Propagator des freien Teilchens zu definieren, geht auf Wilson /30/ zurück (in der früheren Arbeit /29/ schenkt er den Konvergenzproblemen noch keine Beachtung). Wilson /30/ folgend verwenden wir euklidische Metrik (unsere Konventionen sind in Anhang A.1. definiert). Der von ihm benutzte kinetische Term des freien Fermions kann auf folgende Form gebracht werden:

$$(34) \qquad \mathcal{L}_0 = \overline{\psi_n} \left[i\gamma \nabla(n) - \frac{\varepsilon}{2} \Delta(n) \right] \psi_n$$

wobei

$$(35) \qquad \nabla_{\vec{\nu}} f_n = \frac{1}{2\varepsilon} \left[f_{n+\vec{\nu}} - f_{n-\vec{\nu}} \right]$$

$$(36) \qquad \Delta_{\vec{\nu}} f_n = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[f_{n+\vec{\nu}} - 2 f_n + f_{n-\vec{\nu}} \right]$$

Offensichtlich gilt $\lim_{\varepsilon \to 0} \left(i\gamma \nabla - \frac{\varepsilon}{2} \Delta \right) f_n = i\gamma \partial_x f(x)$

Wir zeigen jetzt, daß die Wahl (34) eine Polstruktur der Greenschen Funktion im Gitter bewirkt, die das gewünschte Kontinuumsverhalten im Grenzfall liefert.

5. Zur Berechnung des Propagators im Wechselwirkungsfalle

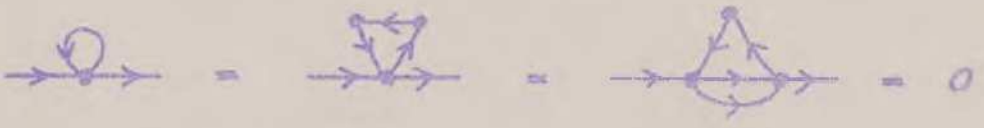
In diesem Abschnitt geben wir die expliziten Beiträge der ersten Ordnungen an und gehen auf einige technische Details ein.

5.1. Mittelungsmethode

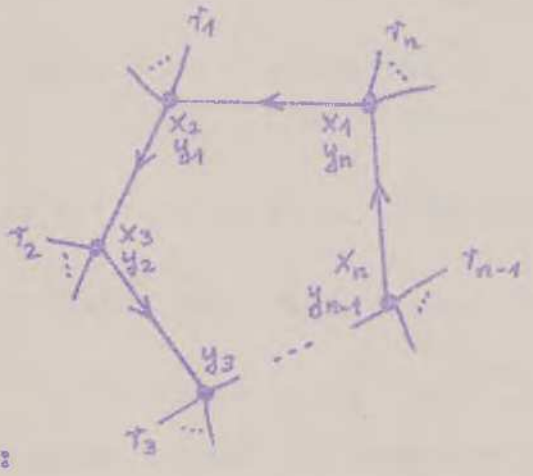
Wir beginnen mit der Mittelungsmethode (vgl. Abschnitt 4), d.h. wir verwenden die symmetrische Ableitung (A.2.14) aus Anhang A.2. Mit dieser Festlegung ist die letzte Freiheit bei der Auswertung des Graphenschemas beseitigt. Die Metrik ist $(+ - - \ldots)$. Nützlich ist ein Satz, dessen Inhalt die Anzahl der Graphen pro Ordnung stark einschränkt:

> Bei Verwendung des symmetrischen Ableitung (A.2.14) verschwinden alle jene Graphen identisch, die mindestens einen loop mit einer ungeraden Zahl von Fermion-Propagatoren enthalten.

Beispiele:



(1)



$= 0$

Beweis:

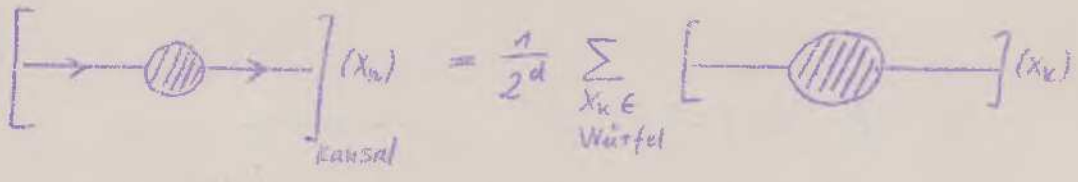
Wir betrachten nur den dem loop (1) entsprechenden Teil des Graphen, und dabei auch nur die δ_ε -Funktionen:

(23) $= F_4^2 F_2 (d-1)^2 \left[\nabla^2 d_\varepsilon(0)\right]^2$

(24) $= -F_4^2 (d-1)\left[d_\varepsilon(0) d_\varepsilon^{(2)}(0)\right] \cdot \left[\sum_\mu (g^{\mu\mu})^2 \gamma^\mu \nabla^\mu\right]$

Durch multiplikatives Aneinanderfügen dieser Operatoren erhalten wir einen Operator, dessen Wirkung auf $d_\varepsilon(x-y)$ uns den Beitrag des betrachteten Graphen angibt.

Mit diesem Beispiel schließen wir die Ausführungen zur Auswertung des Graphenschemas unter Benutzung der symmetrischen Ableitung ab. Hat man die Graphen bis zu einer bestimmten Ordnung berechnet, ist noch die Mittelungsprozedur auszuführen:

(25) 

Erst dann hat man den Beitrag des betreffenden Graphen zur kausalen Greenschen Funktion im Gitter ermittelt.

5.2. Wilsons Methode (euklidische Metrik)

Benutzt man die freie Gitterwirkung (4.34) von Wilson /30/, erhält man unter Zugrundelegung analoger Regeln ähnliche Beiträge wie (12) bis (20). Ein Teil der Rechnungen verläuft genauso - z.B. die Manipulationen mit den γ-Matrizen -, anders ist natürlich die δ-Reduktion auszuführen. Insbesondere treten dabei beliebige Linearkombinationen von $\delta_{x+\rho\varepsilon_\mu, y}$ auf, sodaß die Taylorsatz-Variante (A.2.15, 16) nicht mehr anwendbar ist. Wir müssen auf die Formel (A.2.33) zurückgreifen oder ein zu diesem Ansatz analoges Schema benutzen. Natürlich gilt jetzt auch nicht mehr (1), sodaß hier in jeder Ordnung wesentlich mehr Graphen beitragen.

6. Wechselwirkung mehrerer Felder

In diesem Abschnitt werden einige einführende Bemerkungen zur Behandlung mehrerer wechselwirkender Felder gemacht. Konkret wird das Graphenschema für zwei Fermifelder ψ und χ entwickelt:

$$S = S_0 + S_i$$

$$S_0 = \int dx dy\, G(x,y)_{\beta\alpha}\, \bar{\psi}_\beta(y)\, \psi_\alpha(x) + \int du dv\, \Gamma(u,v)_{\varepsilon\delta}\, \bar{\chi}_\varepsilon(v)\, \chi_\delta(u)$$

(1)
$$G(x,y)_{\beta\alpha} = \delta(x-y)\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right]_{\beta\alpha}$$

$$\Gamma(u,v)_{\varepsilon\delta} = \delta(u-v)\left[i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} - \mu \right]_{\varepsilon\delta}$$

Ausgangspunkt ist

(2)
$$\langle \tilde{0} | T\, \bar{\psi}_\beta(y)\, \psi_\alpha(x) | \tilde{0} \rangle = \frac{\frac{1}{N} \int \mathcal{D}g\, \mathcal{D}\bar{g}\, \mathcal{D}\bar{k}\, \mathcal{D}k\, e^{iS}\, \bar{g}_\beta(y)\, g_\alpha(x)}{\frac{1}{N} \int \mathcal{D}\bar{g}\, \mathcal{D}g\, \mathcal{D}\bar{k}\, \mathcal{D}k\, e^{iS}}$$

Dabei sind $g, \bar{g}$ sowie $k, \bar{k}$ die den quantisierten Feldern $\psi, \bar{\psi}$ bzw. $\chi, \bar{\chi}$ entsprechenden pseudoklassischen Größen:

(3)
$$\{ g_\alpha(x), g_\beta(y) \} = \{ g_\alpha(x), \bar{g}_\beta(y) \} = \{ g_\alpha(x), \bar{k}_\beta(y) \} = \dots = 0$$

Wir entwickeln wieder das Exponential der freien Wirkung (1). Das ergibt für den Zähler in (2):

(4)
$$\sum_{K,\varkappa=0}^{\infty} \frac{i^{K+\varkappa}}{K!\,\varkappa!} \int dx_1 \dots dy_K\, du_1 \dots dv_\varkappa\; G(1) \dots G(K)\, \Gamma(1) \dots \Gamma(\varkappa)\; \varphi^K_\varkappa$$

(5)
$$\varphi^K_\varkappa = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}g\, \mathcal{D}\bar{g}\, \mathcal{D}\bar{k}\, \mathcal{D}k\, e^{iS_i}\, \bar{g}_\beta(y)\, g_\alpha(x) \left[\bar{g}_{\beta_1}(y_1)\, g_{\alpha_1}(x_1) \right] \dots$$

$$\left[\bar{g}_{\beta_K}(y_K)\, g_{\alpha_K}(x_K) \right] \dots \left[\bar{k}_{\varepsilon_\varkappa}(v_\varkappa)\, k_{\delta_\varkappa}(u_\varkappa) \right]$$

ziert werden. Es kommt uns jetzt darauf an, einige Aussagen über die geeignete Definition der Differenzenoperatoren zu treffen. Um konkret zu sein, betrachten wir einen exakt aufsummierbaren Fall, und versuchen anschließend, die Resultate zu verallgemeinern.

6.1. Ein Beispiel

Sei

$$(11) \qquad \mathcal{L}_i = -m_1 \bar{\Psi}\Psi - \mu_1 \bar{\chi}\chi - g\left[\bar{\Psi}\chi + \bar{\chi}\Psi\right]$$

Die M- und f-Koeffizienten sind in Anhang A.4 berechnet. Es tragen nur folgende Graphen bei, die Vertices mit einem einlaufenden und einem auslaufenden Propagator enthalten:

k = 0:

$$= i \frac{\mu_1}{[m_1\mu_1 - g^2]} d_\xi(x-y)$$

k = 1:

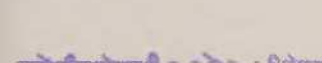
$$= i \left[\frac{\mu_1}{m_1\mu_1 - g^2}\right]^2 (i\gamma\nabla^\psi - m)\, d_\xi(x-y)$$

$$= i \left[\frac{g}{m_1\mu_1 - g^2}\right]^2 (i\gamma\nabla^\chi - \mu)\, d_\xi(x-y)$$

k = 2:

$$= i \left[\frac{\mu_1}{m_1\mu_1 - g^2}\right]^3 (i\gamma\nabla^\psi - m_1)^2\, d_\xi(x-y)$$

$$= i \frac{\mu_1}{m_1\mu_1 - g^2} \left[\frac{g}{m_1\mu_1 - g^2}\right]^2 (i\gamma\nabla^\psi - m)(i\gamma\nabla^\chi - \mu)\, d_\xi(x-y)$$



$$= i \frac{\mu_1}{m_1\mu_1 - g^2} \left[\frac{g}{m_1\mu_1 - g^2}\right]^2 (i\nabla^\chi - \mu)(i\gamma\nabla^\psi - m)\, d_\xi(x-y)$$

$$= i \frac{m_1}{m_1\mu_1 - g^2} \left[\frac{g}{m_1\mu_1 - g^2}\right]^2 (i\gamma\nabla^\chi - \mu)^2\, d_\xi(x-y)$$

7. Schlußbemerkungen

Ziel der Arbeit war die Formulierung einer Entwicklung für Greensche Funktionen von Fermionen für den Fall starker Kopplung.

Betrachtet wurden ein selbstwechselwirkendes Feld sowie zwei gekoppelte Fermifelder. Die Übertragung der die Entwicklung repräsentierenden Graphen auf allgemeinere Situationen - insbesondere die Wechselwirkung von Bosonen mit Fermionen - stößt auf keine formalen Probleme. Die Darlegung beschränkt sich auf die Zweipunktfunktion, aber die Formulierung des Approximationsschemas für n-Punkt-Funktionen ist ebenfalls trivial.

Die die Zweipunktfunktion darstellenden Funktionalintegrale über Grassmannvariable wurden, nachdem sie in eine Reihe nach negativen Potenzen der Kopplungskonstanten entwickelt wurden, in einem Gitterraum ausgewertet. Das Resultat dieses Vorgehens ist eine unendliche Reihe der Form (bis auf Kovarianzprobleme)

$$(1) \qquad \tilde{S}^{\varepsilon}(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\varepsilon) \left(\gamma \nabla\right)^k \delta_{\varepsilon}(x_n)$$

wobei die $C_k(\varepsilon)$ ihrerseits komplizierte unendliche (i.a. divergente) Reihen in der Gitterkonstanten ε sind. Nehmen wir die Existenz einer Spektraldarstellung für $\tilde{S}_F(x)$ an:

$$(2) \qquad \tilde{S}_F(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \, e^{-ipx} \, \tilde{S}_F(p)$$

$$\tilde{S}_F(p) = \int_0^{\infty} d M^2 \, \frac{\not{p} \, \tilde{\rho}_1(M^2) + \tilde{\rho}_2(M^2)}{M^2 - p^2}$$

Dann hängen die Grenzwerte der $C_k(\varepsilon)$ - sofern sie existieren oder durch geeignete Approximationsverfahren definiert werden können - mit den Spektralfunktionen wie folgt zusammen:

$$C_{2K+1}(\varepsilon) \longrightarrow -i^{2K+1} \int_0^\infty dM^2 \; \frac{\tilde{\rho}_1(M^2)}{M^{2K+2}}$$

(3)

$$C_{2K}(\varepsilon) \longrightarrow -i^{2K} \int_0^\infty dM^2 \; \frac{\tilde{\rho}_2(M^2)}{M^{2K+2}}$$

Wenn also die Zweipunktfunktion (2) Spektralfunktionen besitzt, deren Momente existieren, sollte unserer Entwicklung bei geeigneter Behandlung ein Sinn zukommen. Das setzt insbesondere voraus, daß das Spektrum nicht bei Null beginnt; eine bereits von der Quantenmechanik /24/ vertraute Feststellung.

Die Konvergenz der Reihe (1) kann beeinflußt werden, indem man - wie in Abschnitt 6 demonstriert - nicht nach $\overline{\Psi} i\gamma\partial \Psi$, sondern nach $\overline{\Psi}[i\gamma\partial - m]\Psi$ entwickelt, wobei m irgendein Parameter sein kann. Ist es nicht die Masse, muß sein Auftreten durch einen zusätzlichen Wechselwirkungsterm kompensiert werden.

An dieser Stelle sollen einige noch ungelöste wesentliche Probleme erwähnt werden, deren Lösung eng mit der Konvergenz von (1) zusammenhängt. Da ist zunächst die rein technische Frage der Konvergenz von (1) in ε. Im allgemeinen ist (1) keine Potenzreihe, sondern enthält negative Potenzen von ε. Durch geeignete Verfahren wie Padéapproximation oder Borelsummation /24, 2[illegible], 37/ sollte die Aufsummation zumindest in nichttrivialen Spezialfällen möglich sein.

Eng mit diesen Fragen verknüpft ist das noch nicht gelöste Renormierungsproblem, sodaß auch aus diesem Grunde die Entwicklung zunächst formalen Charakter hat. Vermutlich ist es sinnvoll, die Renormierung in engem Zusammenhang mit der Konvergenz in ε zu untersuchen. Vergleichsweise harmloser scheint dagegen die bei einigen Graphen vorhandene Verletzung der Kovarianz. Sie ist für Gitterraumtheorien geradezu typisch und sollte bei $\varepsilon \to 0$ zum Verschwinden gebracht werden können.

Ein Teil der Arbeit ist der Frage gewidmet, welcher Diffe-

renzenoperator geeignet ist zur Berechnung der kausalen Greenschen Funktion. Wir haben am Beispiel des freien Propagators gezeigt, daß nicht jeder a priori plausible Differenzenoperator verwendet werden darf. Mehrere Varianten zur Lösung dieses Problems werden präsentiert. Die von uns vorgeschlagene Verwendung des Operators

$$\nabla f_n = \frac{1}{2\varepsilon}\left[f_{n+1} - f_{n-1}\right]$$

in Verbindung mit einer Mittelung von $S_\varepsilon(x_n)$ über einen Würfel im Gitterraum mit der Kantenlänge ε löst das Problem für das freie Teilchen auf recht einfache Weise.

Es gibt Anzeichen dafür, daß die Methode auch bei vorhandener Wechselwirkung sinnvoll bleibt.

Mit der Wahl geeigneter Differenzenoperatoren ist das Approximationsschema hinreichend definiert, um für Untersuchungen an Feldtheorien verwendet werden zu können. Dabei wird man auch die noch ausstehenden Probleme - Konvergenz, Renormierung - genauer studieren können. Naheliegend, weil wohl als Testfall am ehesten zugänglich, dürfte es sein, das Schwingermodell /38/ und das Thirringmodell /35/ in die nähere Wahl zu ziehen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. F. Kaschluhn für die Möglichkeit, im Bereich Theorie der Felder und Teilchen der Humboldt-Universität Berlin die Arbeit anfertigen zu können und für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit.

Allen Kollegen dieses Bereiches sowie der Theoriegruppe des IfH Zeuthen danke ich für Diskussionen und Anregungen, die bei der Einarbeitung in das Gebiet der Hochenergiephysik und für die Anfertigung dieser Arbeit von Nutzen waren.

Mein besonderer Dank gilt den Herren Dr. D. Ebert und Dr. H.-J. Otto für die Betreuung in der ersten Phase des Forschungsstudiums sowie Herrn Dr. H. J. Kaiser, der die Anregung zur Bearbeitung des Themas gab und mit vielen Diskussionen und förderlichen Hinweisen zum Gelingen der Arbeit beitrug. Einige Resultate der Arbeit haben ihren Ursprung in gemeinsamen Diskussionen.

Literaturverzeichnis

/ 1/ R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367

/ 2/ R. P. Feynman, Phys. Rev. 80 (1950) 440

/ 3/ P. T. Matthews, A. Salam, Nuovo Cimento 12 (1954) 563

/ 4/ P. T. Matthews, A. Salam, Nuovo Cimento 2 (1955) 120

/ 5/ J. M. Chalatnikov, ŽETF 28 (1955) 633

/ 6/ Cécile Morette, Phys. Rev. 81 (1950) 848

/ 7/ W. Tobocman, Nuovo Cimento 3 (1956) 1213

/ 8/ D. J. Candlin, Nuovo Cimento 4 (1956) 231

/ 9/ J. L. Martin, Proc. Roy. Soc. 251 (1959) 543

/10/ J. R. Klauder, Ann. Phys. (N.Y.) 11 (1960) 123

/11/ F. A. Berezin, Metod vtoričnowo kwantowanije, Moskau 1965

/12/ R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, Mc Graw-Hill 1965

/13/ L. Schulman, Phys. Rev. 1976 (1968) 1558

/14/ J. Tarski, Universität Hamburg Preprint DESY 74/29

/15/ J. T. Devreese, G. J. Papadopoulos, Universität Antwerpen Preprint (1975)

/16/ S. Albeverio, R. Höegh-Krohn, Universität Oslo Preprint (1974) ISBN 82-553-0193-3 (Mathematics) No 20

/17/ S. Mandelstam, Nucl. Phys. B64 (1973) 205

/18/ S. Mandelstam, Nucl. Phys. B69 (1974) 77

/19/ M. Kaku, K. Kikkawa, Phys. Rev. D10 (1974) 1110, 1823, 3943

/20/ W. Kummer, Renormalization of Nonabelian Gauge Fields, Lectures at the XV. Internationale Universitätswochen für Kernphysik Schladming, Austria, Feb. 1976 (ausführliche Literaturhinweise)

/21/ R. Rajaraman, Some Non-Perturbative Semi-Classical Methods in Quantum Field Theory (Review), Princeton Preprint (1975) AEC 2220-47
(ausführliche Literaturhinweise)

/22/ S. Hori, Nucl. Phys. 30 (1962) 644

/23/ G. Heber, H. J. Kaiser, Z. Naturforsch. 19a (1964) 828

/24/ H. J. Kaiser, Zeuthen-preprint PHE 74-11

/25/ H. J. Kaiser, Zeuthen-preprint PHE 76-9

/26/ T. Riemann, Beitrag zum Internationalen Symposium über Hochenergiephysik Kühlungsborn 1975

/27/ H. G. Dosch, Nucl. Phys. B96 (1975) 525

/28/ S. Kövesi-Domokos, Nuovo Cimento 33A (1975) 769

/29/ K. G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445

/30/ K. G. Wilson, Cornell-Preprint CLNS-321 (1975)

/31/ T. Riemann, H. J. Kaiser, Beitrag zur Tbilissi-Konferenz (1976) und Zeuthen-preprint PHE 76-9; Beitrag zum Ahrenshooper Symposium 1976

/32/ Lichnerowicz, Lineare Algebra und lineare Analysis, Berlin 1956

/33/ J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 395

/34/ S. D. Drell, M. Weinstein, S. Yankielowicz, Phys. Rev. D14 (1976) 487, 1627

/35/ W. Thirring, Annals of Physics 3 (1958) 91

/36/ N. N. Bogoljubov, D. V. Širkov, Wwedenije w teoriju kwantowannych polej, Moskva 1973

/37/ P. R. Graves-Morris, Padé Approximants and their Applications, Academic Press London and New York 1973

/38/ J. Schwinger, Phys. Rev. 128 (1962) 2425

Anhang 1: Bezeichnungen

Die Raum-Zeit-Dimension ist d. Im Falle pseudoeuklidischer Metrik verwenden wir

$$g^{\mu\mu} = (+1, -1, \cdots, -1) \qquad g^{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

Die γ-Matrizen genügen der Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$

Lorentzindizes werden mit $\mu, \nu, \lambda \ldots$ bezeichnet, Spinorindizes mit $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \ldots$. Feldoperatoren sind Ψ, χ, die entsprechenden pseudoklassischen Größen ξ, η. Vektoren im Heisenbergbild werden mit einer Tilde gekennzeichnet, z.B.

$$\langle \tilde{0} |\ \bar{\Psi}_\beta(y)\, \Psi_\alpha(x)\ | \tilde{0} \rangle$$

Entsprechend ist $\tilde{S}$ die volle, S die freie Greensche Funktion des Fermions; $\tilde{S}_F$ ist die kausale Greensche Funktion. Als Differentialoperatoren verwenden wir

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_x = \partial$$

Differenzenoperatoren sind $\nabla(n) = \nabla$ sowie $\Delta(n) = \Delta$. Die Gitterkonstante ist ε. Partielle Ableitungen werden symbolisiert z.B. durch

$$\nabla_{\vec{\nu}}(n) f(n) = \frac{1}{2\varepsilon} \left[f(n+\vec{\nu}) - f(n-\vec{\nu}) \right]$$

$$n = (n_0, n_1 \ldots n_{d-1})$$

$$\vec{\nu} = (1, 0, \ldots 0) \quad \text{usw.}$$

Bei Verwendung euklidischer Metrik ergeben sich folgende Änderungen: Nullte Komponenten von Vierervektoren werden ersetzt gemäß

$$x_0 \rightarrow -i x_0$$

Dem entspricht $g^{\mu\mu} \rightarrow -\delta^{\mu\mu} = (+1, -1, \ldots, -1)$

Das bedeutet für die γ-Matrizen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$$

Anhang 2: Der Gitterraum

Alle Formeln werden hier für den Fall d = 1 angegeben. Die Verallgemeinerung auf d > 1 ist einfach, jedoch in den technischen Details zum Teil recht kompliziert.

$$(1) \qquad f(x) \longrightarrow f(x_n) = f(n\varepsilon) = f(n) = f_n$$

Wir verwenden im Grenzfall ein unendlich ausgedehntes Gitter, d.h. $n = -\infty, \ldots, +\infty$

$$(2) \qquad \int f(x)\,dx \longrightarrow \varepsilon \sum_n f_n \qquad \left(d>1: \quad \varepsilon^d \sum_{\{n\}} f_{\{n\}} \right)$$

Auf der Grundlage von (2) ist die Definition der Gitterraum-deltafunktion möglich:

$$(3) \qquad \delta_\varepsilon(x_n - y) = \frac{\delta_{n,m}}{\varepsilon} \qquad (y = x_m)$$

$$d>1: \qquad \delta_\varepsilon(x_n - y) = \frac{\delta_{\{n\},\{m\}}}{\varepsilon^d}$$

Die Fouriertransformation lautet für den diskreten Ortsraum:

$$(4) \qquad f(x_n) = \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{+\frac{\pi}{\varepsilon}} \frac{dp}{2\pi}\, f(p)\, e^{-ipx_n}$$

$$(5) \qquad f(p) = \varepsilon \sum_m f(x_m)\, e^{ipx_m}$$

Insbesondere gilt

$$\delta(x_n) \leftrightarrow 1$$

Wir geben noch eine für die Anwendungen nützliche Formel an:

$$(6) \qquad \int_{-\frac{\pi}{\varepsilon}}^{+\frac{\pi}{\varepsilon}} dp\, f(p) = 2\pi i \left[\pm \sum \text{Res.} \right]$$

Anhang 3: Grassmann-Variable

Eine ausführliche Einführung in das Rechnen mit Grassmann-Variablen ist in /11/ enthalten. Hier sollen einige zum Verständnis des Textes nützliche Formeln angegeben werden.

Seien $g_1, g_2, \ldots, g_N$ Erzeugende einer Algebra G über dem Körper C der komplexen Zahlen. Weiter sei eine Involution $J(g_n) = g_n^+$ definiert durch die Eigenschaften

(1) $J(g_n g_m) = g_m^+ g_n^+$

(2) $J(g_n^+) = g_n$

(3) $J(a g_n) = \bar{a}\, g_n^+ \qquad (a \in C)$

Die g_n^+ seien ebenfalls Erzeugende von G. Durch die zusätzliche Forderung

(4) $\{g_n, g_m\} = \{g_n, g_m^+\} = 0$

wird G zur Grassmannalgebra G_N.

Produkte aus einer geraden Anzahl von Erzeugenden heißen gerade Elemente der Algebra und kommutieren mit allen Elementen der Algebra.

Eine Basis in G_N ist

(5) $\left\{1;\ g_1, g_1^+, \ldots, g_N^+;\ g_1 g_1^+, \ldots, g_1 g_2 \ldots g_1 g_1^+ g_2 \ldots g_N g_N^+\right\}$

Jedes Element von G_N ist als Linearkombination dieser Basiselemente darstellbar. Die Dimension der Algebra (in ihrer Eigenschaft als linearer Vektorraum) beträgt

(6) $1 + \binom{2N}{1} + \binom{2N}{2} + \cdots + \binom{2N}{2N} = (1+1)^{2N} = 2^{2N}$

Man beachte, daß die komplexen Zahlen in der Algebra G_N enthalten sind, weil die Basis (5) die komplexe Zahl 1 enthält.

Anhang 4: M- und f-Koeffizienten

(2.10) und (2.12) sind Spezialfälle der Beziehung

$$\varphi_K^{\varepsilon} = \begin{cases} (-1)^{\partial} M_{\beta\alpha\,\beta_1\alpha_1 \cdots \beta_K\alpha_K} & \text{wenn } x = y = \cdots = y_K \\ (-1)^{\partial} M_{\beta\alpha}\, M_{\beta_1\alpha_1 \cdots \beta_K\alpha_K} & \text{wenn } x = y \neq x_1 = \cdots = y_K \\ \quad \vdots \text{ (Permutationen)} & \\ (-1)^{\partial} M_{\beta_1\beta\,\alpha_1\alpha}\, M_{\beta_2\alpha_2 \cdots \beta_K\alpha_K} & \text{wenn } x = y = x_1 = y_1 \\ \quad \vdots \text{ (Permutationen; andere Konfigurationen)} & \neq x_2 = y_2 = \cdots = y_K \\ (-1)^{\partial} M_{\beta\alpha}\, M_{\beta_1\alpha_1} \cdots M_{\beta_K\alpha_K} & \text{wenn } x = y \neq x_1 = y_1 \neq \cdots \neq x_K = y_K \\ \quad \vdots \text{ (Permutationen)} & \end{cases} \tag{1}$$

Andererseits hatten wir die f-Koeffizienten so definiert, daß (2.21) und (2.22) Spezialfälle der folgenden Beziehung sind:

$$\begin{aligned} \varphi_K^{\varepsilon} = \varepsilon^{(2K+2)\alpha} \Big[& (-1)^{\partial} f_{\beta\alpha\,\beta_1\alpha_1 \cdots \beta_K\alpha_K}\, \delta_\varepsilon(x-y)\, \delta_\varepsilon(x-x_1) \cdots \delta_\varepsilon(x-y_K) \\ & + (-1)^{\partial} f_{\beta\alpha}\, f_{\beta_1\alpha_1 \cdots \beta_K\alpha_K}\, \delta_\varepsilon(x-y)\, \delta_\varepsilon(x_1-y_1) \cdots \delta_\varepsilon(x_1-y_K) + \cdots \\ & \text{(Permutationen)} \cdots + \cdots \text{(Permutationen; andere Konfigurationen)} \cdots \\ & + (-1)^{\partial} f_{\beta\alpha}\, f_{\beta_1\alpha_1} \cdots f_{\beta_K\alpha_K}\, \delta_\varepsilon(x-y)\, \delta_\varepsilon(x_1-y_1) \cdots \delta_\varepsilon(x_K-y_K) \\ & + \cdots \text{(Permutationen)} \Big] \end{aligned} \tag{2}$$

Die Arbeit wurde selbständig verfaßt.
Es wurden keine anderen als die angegebenen
Hilfsmittel benutzt.

Berlin, 13.3.77 Tord Riemann